Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Martina Šarić

Invarijantni potprostori na realnim vektorskim prostorima

Završni rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Martina Šarić

Invarijantni potprostori na realnim vektorskim prostorima

Završni rad

Voditelj: izv.prof.dr.sc. Ivan Matić

Osijek, 2016.

Sažetak. U ovom završnom radu u prva tri poglavlja prisjetiti ćemo se linearnih preslikavanja na konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima , značajnih svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora operatora. Definirati ćemo invarijantne potprostore i objasniti njihovo značenje te ćemo radi lakšeg razumijevanja napraviti nekoliko primjera, a tada ćemo u četvrtom poglavlju pojasniti primjenu polinoma operatora. Matrični zapis operatora nam olakšava prikupiti informacije o njegovom djelovanju na vektorskom prostoru te nam skraćuje postupak pri donošenju zaključaka.

Obzirom da je jedan od glavnih ciljeva linearne algebre pojednostaviti dani matrični prikaz operatora, u petom i šestom poglavlju ćemo objasniti uvjete koje zadani operator treba zadovoljavati kako bi nam bilo jasno može li se prikazati na željeni način i definirati ćemo dva specifična tipa matrica koja nam uvelike doprinose pri postizanju toga cilja. U zadnjem poglavlju ćemo sve rezultate primjeniti na realne konačno dimenzionalne vektorske prostore i ispitati postojanje invarijantnih potprostora obzirom na dani operator.

Ključne riječi: Operatori, linearni operatori, linearna preslikavanja, potprostori, invarijantnost, invarijantni potprostori, svojstveni vektori, eigen vektori, svojstvene vrijednosti, eigen vrijednosti, gornjetrokutaste matrice, dijagonalni prikaz operatora

Abstract. In this final work, we recall the first three chapters: linear maps on the final dimensional vector spaces, significant eigenvalues, and eigenvectors of operators. By using a few examples to help in the explanation, we will define the invariant subspaces and explain their meaning. In chapter 4 we will explain polynomials applied to operators. The matrix form of operators helps facilitate the collection of information about its behaviour on the vector space and shortens the procedure of making conclusions.

Considering that one of the main goals of linear algebra is to simplify a given matrix form of operators, in the fifth and sixth chapter we will explain the conditions that the default operator should satisfy so we can make a simplified matrix form of it. We will also define two specific matrix forms that greatly contribute in achieving this goal. In the last chapter we apply all results to the real final dimensional vector spaces and examine the existence of invariant subspace respect to a given operator.

Key words: operators, linear transformations, linear map, subspaces, invariant subspaces, eigen vectors, eigen values, uppertriangular matrices, diagonal matrices

Sadržaj

1 Uvod

Poznata su nam linearna preslikavanja sa jednog vektorskog prostora na drugi vektorski prostor. Sada ćemo istražiti linearna preslikavanja sa jednog vektorskog prostora u njega samog, tj. na taj isti vektorski prostor.
Takvo istraživanje predstavlja najdublji i najvažniji dio linearne algebre. Većina ključnih rezultata u ovom području ne vrijede za beskonačno dimenzionalne[1] vektorske prostore, tako da ćemo proučavati preslikavanja samo na konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima. Kako bi izbjegli trivijalnosti želimo eliminirati iz razmatranja nul-potprostor, tj. vektorski prostor $\{0\}$.
Prisjetimo se da sa K označavamo skup realnih brojeva ($\mathbb{R}$) ili skup kompleksnih brojeva ($\mathbb{C}$) te ćemo u ostatku ovog rada sa V označavati vektorski prostor konačne dimenzije nad skupom K, različit od nul-vektorskog prostora, te ćemo za linearni operator $T \in \mathcal{L}(V)$ pisati samo operator $T \in \mathcal{L}(V)$.

2 Invarijantni potprostori

U ovom poglavlju ćemo se prisjetiti što je to linearni operator i promotriti ćemo neka njegova svojstva koja će nam pomoći da bolje razumijemo strukturu operatora. Prisjetimo se da je linearni operator preslikavanje na vektorskom prostoru sa svojstvima aditivnosti i homogenosti, preciznije:

Definicija 2.1. *Neka su V i W vektorski prostori. Preslikavanje $T : V \to W$ naziva se linearni operator ako vrijedi:*

$$(\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X)\ (\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K) \qquad T(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2) = \alpha_1 T(\vec{x}_1) + \alpha_2 T(\vec{x}_2)$$

Također ćemo se prisjetiti da sa $\mathcal{L}(V)$ označavamo skup linearnih operatora na vektorskom prostoru V. Kako bismo mogli bolje razumjeti definiciju linearnog operatora pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 2.2. *Neka je $T \in \mathcal{L}(V)$. Neka imamo konačan broj potprostora vektorskog prostora V , tj. ako je zadan rastav vektorskog prostora V kao direktna suma potprostora $U_1, ..., U_m$ na sljedeći način:*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m, \tag{2.1}$$

gdje je svaki U_j pravi potprostor prostora V. Kako bismo razumjeli djelovanje operatora T na vektorskom prostoru V, dovoljno je razumjeti djelovanje operatora T na svakom od potprostora U_j vektorskog prostora V, tj. djelovanje operatora $T \mid U_j$. (Ovdje $T \mid U_j$ označava djelovanje operatora T na potprostor U_j od V, gdje U_j predstavlja jedan od ukupno m potprostora prostora V u rastavu na direktne sume (vidjeti 2.1)
Očito, lakše je promatrati djelovanje operatora T na vektorski potprostor U_j vektorskog prostora V nego promatrati njegovo djelovanje na čitavom vektorskom prostoru V, jer je U_j suženje prostora V, odnosno manji vektorski prostor nego prostor V.

[1] Najpoznatiji neriješeni problem u funkcionalnoj analizi naziva se *problem invarijantnog potprostora* koji se bavi invarijantnim potprostorima na beskonačno dimenzionalnim vektorskim prostorima.

Međutim, ako želimo primijeniti operacije korisne za proučavanje operatora kao što je potenciranje operatora, onda moramo biti oprezni jer operator $T \mid U_j$ *možda neće preslikati prostor* U_j *u samoga sebe. Drugim riječima,* $T \mid U_j$ *tada neće biti operator na prostoru* U_j*. Stoga, potrebno je rastaviti prostor* V *tako da operator* T *preslikava svaki potprostor* U_j *u samoga sebe, a upravo takav rastav prostora* V *naveden je pod (2.1). Takvi vektorski prostori, koji se djelovanjem operatora preslikaju sami u sebe, vrlo su važni i nazivaju se* ***invarijantni potprostori*** *.*

Definicija 2.3. *Neka je* U *potprostor vektorskog prostora* V *i* $T \in \mathcal{L}(V)$*. Kažemo da je* U *invarijantan obzirom na operator* T*, odnosno* T*-invarijantan ako* $\vec{u} \in U$ *povlači* $T\vec{u} \in U$*. Drugim riječima,* U *je* T*-invarijantan ako je* $T \mid U$ *operator na prostoru* U*.*

Pogledajmo neke jednostavne primjere invarijantnih potprostora:

Primjer 2.4. *Neka je* $T \in \mathcal{L}(V)$ *. Očito je* $\{0\}$ *potprostor invarijantan obzirom na djelovanje operatora* T *jer ako je* $\vec{u} \in \{0\}$ *onda je* $T\vec{u} = \{\vec{0}\}$*, a tada slijedi* $T\vec{u} \in \{0\}$*. Analogno, cijeli prostor* V *je* T*-invarijantan. Stoga se pod invarijantnim potprostorom operatora* T *uvijek podrazumijeva pravi potprostor, odnosno potprostor koji je različit od* $\{0\}$ *i* V *.*

Sada se pitamo kako operator djeluje na invarijantnom potprostoru dimenzije 1?

Primjer 2.5. *Neka je* V *vektorski prostor i neka je* U *potprostor vektorskog prostora* V *dimenzije* 1*, tj. neka je* U *definiran na slijedeći način:*

$$U = \{a\vec{u} : a \in K\}, \quad (\vec{u} \in U, K = \mathbb{R}) \tag{2.2}$$

Tada je U *jednodimenzionalni potprostor vektorskog prostora* V*. Štoviše, svaki potprostor dimezije* 1*, vektorskog prostora* V *je oblika zapisanog pod (2.2). Ako je* $\vec{u} \in V$ *i potprostor* U *je definiran kao što je navedeno izrazom (2.2) te je on invarijantan obzirom na operator* $T \in \mathcal{L}(V)$ *, tada je prema definiciji* $T\vec{u} \in U$ *i stoga postoji neki skalar* $\lambda \in K$ *takav da je*

$$T\vec{u} = \lambda\vec{u}. \tag{2.3}$$

S druge strane, ako $\vec{u}$ *je različit od nul-vektora u vektorskom prostoru* V *takav da je* $T\vec{u} = \lambda\vec{u}$ *za neki skalar* $\lambda \in K$ *, tada je potprostor* U *definiran kao u (2.2) potprostor prostora* V*, dimenzije* 1*i on je invarijantan obzirom na djelovanje operatora* T*.*

3 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Jednadžba $T\vec{u} = \lambda\vec{u}$ usko je povezana sa jednodimenzionalnim invarijantnim potprostorima i važno je napomenuti da vektor $\vec{u}$ i skalar λ imaju posebno značenje za dani operator$T$. Prisjetimo se imena vezanih uz dani vektor $\vec{u}$ i skalar λ. Naime, skalar $\lambda \in K$ se naziva **svojstvena vrijednost**[2] operatora $T \in \mathcal{L}(V)$ ako postoji vektor $\vec{u} \in V$ takav da zadovoljava jednakost 2.3 i gdje je vektor $\vec{u}$ različit od nul-vektora. Takav vektor $\vec{u}$ zove se **svojstveni vektor**[3] pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Nužno je da vektor $\vec{u}$ bude različit od nul-vektora jer bi u suprotnom svaki skalar $\lambda \in K$ zadovoljavao danu gornju jednakost (2.3). Sada možemo zaključiti kako operator $T \in \mathcal{L}(V)$ ima invarijantan potprostor dimenzije 1 onda i samo onda ako operator $T \in \mathcal{L}(V)$ ima svojstvenu vrijednost.
Jednadžba $T\vec{u} = \lambda\vec{u}$ je ekvivalentna jednadžbi $(T - \lambda I)\vec{u} = 0$, gdje operator I označava jedinični operator za koji vrijedi $I\vec{v} = \vec{v}, \forall \vec{v} \in V$, pa iz toga vidimo kako je λ svojstvena vrijednost operatora T ako i samo ako $T - \lambda I$ nije injekcija. Konačno, skup svojstvenih vektora operatora T koji zadovoljavaju (2.3) čini potprostor vektorskog prostora V. Radi boljeg razumijevanja, pogledajmo neke primjere svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora:

Primjer 3.1. *Ako je $a \in K$ tada operator aI ima samo jednu svojstvenu vrijednost a, a svaki vektor je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti a.*

Primjer 3.2. *Neka je operator $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definiran na sljedeći način:*

$$T(w, z) = (-z, w). \tag{3.1}$$

Na ovakav način imamo zadanu lijepu geometrijsku interpretaciju operatora T, naime T predstavlja rotaciju u smjeru obrnutom od kazaljke na satu oko središta u $\mathbb{R}^2$. Operator T ima svojstvenu vrijednost onda i samo onda ako postoji vektor različit od nul-vektora u domeni, koji će se preslikati u taj isti vektor pomnožen skalarom. Očito, nul-vektor u $\mathbb{R}^2$ nikada ne zadovoljava danu jednadžbu. Možemo zaključiti da operator$T$ zadan pomoću izraza (3.1) nema svojstvenih vrijednosti.

Kako bi pojasnili prethodni primjer najbolje je promotriti isti operator T, zadan na isti način u kompleksnom koordinatnom sustavu.

Primjer 3.3. *Neka je operator $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ definiran na sljedeći način:*

$$T(w, z) = (-z, w).$$

Ukoliko svojstvene vrijednosti postoje i kako bismo ih pronašli trebamo pronaći skalare takve da :

$$T(w, z) = \lambda(w, z) \tag{3.2}$$

gornji izraz ima rješenja različita od $w = z = 0$. Za operator T definiran pomoću danog izraza (3.1) gornja jednakost ekvivalentna je sustavu jednadžbi:

$$\begin{cases} -z = \lambda w \\ \quad w = \lambda z \end{cases}$$

Iz čega nakon uvrštavanja varijable w iz druge jednadžbe u prvu jednadžbu slijedi:

$$-z = \lambda^2 \ z \ , \qquad / : z, \ z \neq 0$$

[2]U nekim literaturama se koriste nazivi eigen-vrijednost ili karakteristična vrijednost
[3]Često se susrećemo s nazivima eigen-vektor ili karakterističan vektor

$$-1 = \lambda^2 \implies \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$$

Konačno, λ_1 i λ_2 su svojstvene vrijednosti operatora T, a svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1 je vektor oblika $(w, -wi)$,za $w \in \mathbb{C}$ te svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_2 je vektor oblika (w, wi),za $w \in \mathbb{C}$.

Prije nego prijeđemo na sljedeće poglavlje prisjetimo se i ponovimo sljedeće tvrdnje:

Teorem. 3.4. *Neka je $T \in \mathcal{L}(V)$ i neka su λ_1, ..., λ_m svojstvene vrijednosti operatora T i $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m$ su redom pridruženi svojstveni vektori. Tada je skup vektora $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\}$ linearno nezavisan skup.*

Korolar 3.5. *Neka je V vektorski prostor. Svaki operator T na vektorskom prostoru V ima najviše $m \leq dimV$ svojstvenih vrijednosti.*

4 Polinomi operatora

Glavni razlog zbog kojeg postoji teorija operatora koji preslikavaju vektorski prostor u samoga sebe je taj što operatore možemo potencirati. U ovom dijelu ćemo definirati taj pojam i ključni koncept primjene polinoma operatora. Najprije ćemo se prisjetiti definicije polinoma:

Definicija 4.1. *Funkcija $P : K \to K$ zove se* **polinom** *ako je $P(\lambda)$ linearna kombinacija potencija varijable λ:*

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_m\lambda^m. \tag{4.1}$$

Sada kada smo se prisjetili osnovne definicije polinoma definirati ćemo potencije operatora:

Definicija 4.2. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K i neka je $T \in \mathcal{L}(V)$. Definiramo potencije operatora T:*
$T^0 = I$ (jedinični operator), $T^1 = T$, $T^2 = T \cdot T$, $T^3 = T \cdot T^2 = T^2 \cdot T$, i tako dalje, općenito $T^k = T \cdot T^{k-1}$.

Potenciranje operatora ima sljedeća svojstva:

$$T^j \cdot T^k = T^{j+k}, \quad (T^j)^k = T^{jk}, \quad \forall j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Linearna kombinacija potencija operatora T je polinom operatora T. Ako je

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_m\lambda^m$$

bilo koji polinom u varijabli $\lambda \in K$, onda ćemo sa $P(T)$ označiti polinom operatora T s istim koeficijentima $a_0, a_1, ..., a_m \in K$:

$$P(T) = a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_m T^m.$$

Obzirom da je množenje operatora distributivno u odnosu na zbrajanje i budući da vrijedi

$$T^j \cdot T^k = T^{j+k},$$

vrijede sljedeća pravila za računanje s polinomima danog operatora T :

$$R(\lambda) = P(\lambda) + Q(\lambda) \Longrightarrow R(T) = P(T) + Q(T),$$

$$S(\lambda) = P(\lambda) \cdot Q(\lambda) \Longrightarrow S(T) = P(T) \cdot Q(T).$$

Sada kada smo se prisjetili osnovnih definicija i svojstava stigli smo do jedog od središnjih rezultata o operatorima na kompleksnim vektorskim prostorima koje ćemo obraditi u idućem poglavlju.

5 Gornje trokutaste matrice

Teorem. 5.1. *Svaki operator T na konačno dimenzionalnom, kompleksnom vektorskom prostoru V, različitom od nul prostora, ima svojstvene vrijednosti.*

Dokaz. Neka je V kompleksan vektorski prostor, dimenzije $n > 0$ i $T \in \mathcal{L}(V)$. Neka je $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$. Tada skup

$$\{\vec{v}, T\vec{v}, T^2\vec{v}, ..., T^n\vec{v}\}$$

ne može biti linearno nezavisan jer je vektorski prostor V dimenzije n, a skup $\{\vec{v}, T\vec{v}, T^2\vec{v}, ..., T^n\vec{v}\}$ se sastoji od $n+1$ vektora. Stoga, postoje kompleksni brojevi $a_0, a_1, ..., a_n$, koji nisu svi jednaki 0, tako da je

$$0 = a_0\vec{v} + a_1T\vec{v} + \cdots + a_nT^n\vec{v}.$$

Neka je m najveći indeks takav da je $a_m \neq 0$. Budući da je $\vec{v} \neq 0$, koeficijenti $a_1, a_2, ..., a_m$ ne mogu svi biti jednaki 0, onda slijedi $0 < m \leq n$. Neka su koeficijenti $a_0, a_1, ..., a_n$ koeficijenti polinoma koji se može faktorizirati u slijedećem obliku:

$$a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n = c(z - \lambda_1)\cdots(z - \lambda_m), \tag{5.1}$$

gdje je $c \neq 0$, $c \in \mathbb{C}$ i svaki $\lambda_j \in \mathbb{C}$, te (5.1) vrijedi za svaki $z \in \mathbb{C}$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} 0 =& a_0\vec{v} + a_1T\vec{v} + \cdots + a_nT^n\vec{v} \\ =& (a_0I + a_1T + \cdots + a_nT^n)\vec{v} \\ =& c(T - \lambda_1 I)\cdots(T - \lambda_m I)\vec{v}, \end{aligned}$$

što znači da $T - \lambda_j$ nije injekcija, barem za jedan j. Drugim riječima, T ima svojstvenu vrijednost.

Općenito, linearni operator možemo prikazati matricom koja ovisi o izboru baza za svaki od dva vektorska prostora. Obzirom da se bavimo istraživanjem invarijantnih potprostora, tj. linearnih operatora koji se preslikavaju sa jednog vektorskog prostora na taj isti vektorski prostor, potreban nam je izbor jedne baze. Očito, zbog toga jer je riječ o samo jednoj bazi, naša matrica kojom ćemo prikazivati zadani operator biti će kvadratnog oblika.

Neka je $T \in \mathcal{L}(V)$ i neka je $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ baza vektorskog prostora V. Za svaki $k = 1, ..., n$ možemo zapisati:

$$T\vec{v_k} = a_{1,k}\vec{v_1} + \cdots + a_{n,k}\vec{v_n},$$

gdje je $a_{j,k} \in K$ za $j = 1, ..., n$. Tada $n \times n$ matricu oblika :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

zovemo matrica operatora T obzirom na bazu $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ vektorskog prostora V i označavamo ju sa $\mathcal{M}(T, \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\})$ ili samo $\mathcal{M}(T)$ ako je jasno o kojoj je bazi riječ. Ukoliko je T operator na vektorskom prostoru K^n i nije naglašeno o kojoj je bazi riječ, tada je prirodno pretpostaviti kako se radi o kanonskoj bazi, tj. $j - ti$ stupac matrice $\mathcal{M}(T)$ prikazuje djelovanje operatora T na $j - ti$ vektor kanonske baze.

Središnji cilj linearne algebre je pokazati da za operator $T \in \mathcal{L}(V)$ postoji baza prostora V obzirom na koju operator T možemo jednostavnije prikazati pomoću matrice, tj. formirati matricu operatora T sa što je moguće više vrijednosti 0. Naprimjer, ako je V kompleksan vektorski prostor, onda već znamo dovoljno kako bi mogli pokazati da postoji baza prostora V takva da matrica za operator T ima 0 svugdje u prvom stupcu, osim možda na mjestu $a_{1,1}$. Drugim riječima, postoji baza od V obzirom na koju matrica operatora T izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} \lambda & & \\ 0 & * & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

ovdje $*$ [4] predstavlja vrijednosti matrice u svim stupcima, osim u prvom stupcu.

Kako bi dokazali da takav matrični prikaz operatora postoji, uzmimo da je λ svojstvena vrijednost operatora T (teorem 5.1 tvrdi da jedna postoji) i neka je $\vec{v} \neq 0$ pripadni svojstveni vektor. Proširimo $(\vec{v})$ do baze prostora V, tada matrica $\mathcal{M}(T)$ ima gore navedeni oblik. Glavna dijagonala kvadratne matrice (5.2) sastoji se od unosa vrijednosti duž ravne linije iz gornjeg lijevog ugla prema donjem desnom kutu. Kao što se može vidjeti dijagonala matrice (5.2) sastoji se od unosa $a_{1,1}, a_{2,2}, ..., a_{n,n}$. Matrica se zove **gornje trokutasta matrica** ako su svi unosi ispod glavne dijagonale jednaki 0. Naprimjer, 4×4 matrica

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

je gornje trokutasta matrica. Najčešće, gornje trokutastu matricu prikazujemo u slijedećem obliku

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix};$$

0 u matrici iznad pokazuje da su svi unosi ispod dijagonale u ovoj $n \times n$ matrici jednaki 0. Gornje trokutaste matrice mogu biti vrlo jednostavnog prikaza ako razmislimo kako $n \times n$ gornje trokutasta matrica je gotovo napola ispunjena vrijednostima 0. Sljedeća propozicija objašnjava korisnu vezu među gornje trokutastim matricama i invarijantnim potprostorima.

Propozicija 5.2. *Neka je $T \in \mathcal{L}(V)$ i neka je skup $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ baza vektorskog prostora V. Tada su slijedeće tvrdnje ekvivalentne:*
(a) matrica operatora T obzirom na bazu $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ vektorskog prostora V je gornje trokutasta matrica;
(b) $T\vec{v_k} \in span$[5]$\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}$ za svaki $k = 1, ..., n$;
(c) $span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}$ [6] je T-invarijantan potprostor za svaki $k = 1, ..., n$.

Sada ćemo utvrditi da za svaki linearni operator na kompleksnom vektorskom prostoru postoji baza pomoću koje taj operator možemo prikazati u obliku kvadratne matrice koja ispod glavne dijagonale ima sve vrijednosti jednake 0.

[4] Često se koristi znak $*$ u označavanju vrijednosti matrice koje ne poznajemo i nisu nam bitne pri zaključivanju

[5] "*span*" označava linearnu ljusku skupa koji sadrži spomenute vektore

[6] Često se u literaturi koristi i oznaka $[\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}]$

Teorem. 5.3. *Neka je V kompleksan vektorski prostor i $T \in \mathcal{L}(V)$. Tada T ima gornje trokutastu matricu s obzirom na neku bazu prostora V.*

Prije nego započnemo sa dokazivanjem ovoga teorema, iskazati ćemo pomoćnu tvrdnju kojom ćemo se koristiti u samom dokazu:

Propozicija 5.4. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $T \in \mathcal{L}(V)$. Tada su slijedeće tvrdnje ekvivalentne:*
(a) T je invertibilan operator;
(b) T je injektivan operator;
(c) T je surjektivan operator.

Dokaz. Za ovaj dokaz koristiti ćemo princip matematičke indukcije za n jednak dimenziji vektorskog prostora V. Jasno je da željeni rezultat vrijedi ako je $\dim V = 1$. Pretpostavimo sada da je $\dim V > 1$ i da željeni rezultat vrijedi za sve kompleksne vektorske prostore čija je dimenzija manja od dimenzije V. Neka je λ svojstvena vrijednost operatora T (teorem 5.1 jamči da T ima svojstvenu vrijednost). Neka je

$$U = R(T - \lambda I).$$

Budući da $(T - \lambda I)$ nije surjekcija (vidjeti pomoćnu tvrdnju 5.4) $\Longrightarrow \dim U < \dim V$. Nadalje, vektorski prostor U je T - invarijantan potprostor. Da bismo to pokazali, neka je $\vec{u} \in U$, zatim:

$$T\vec{u} = (T - \lambda I)\vec{u} + \lambda\vec{u}.$$

Očito je $(T - \lambda I)\vec{u} \in U$ i $\lambda\vec{u} \in U$. Tako gornja jednadžba pokazuje da je $T\vec{u} \in U$. Dakle, kako je U T- invarijantan potprostor, tada je $T \mid U$ operator na U. Prema pretpostavci, postoji baza $\vec{u_1}, ..., \vec{u_m}$ od U, s obzirom na koju operator $T \mid U$ ima gornje trokutastu matricu. Stoga, za svaki j vrijedi (prema propoziciji 5.2) :

$$T\vec{u_j} = (T \mid U)\vec{u_j} \in span\{\vec{u_1}, ..., \vec{u_j}\} \tag{5.3}$$

Ako proširimo bazu $\{\vec{u_1}, ..., \vec{u_m}\}$ od U do baze $\{\vec{u_1}, ..., \vec{u_m}, \vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ vektorskog prostora V. Tada za svaki k imamo slijedeće:

$$T\vec{v_k} = (T - \lambda I)\vec{v_k} + \lambda\vec{v_k}. \tag{5.4}$$

Ponovno, budući da je U invarijantan obzirom na operator $T \Rightarrow (T - \lambda I)\vec{v_k} \in U = span\{\vec{u_1}, ..., \vec{u_m}\}$ pa iz gornje jednadžbe (5.4) slijedi:

$$T\vec{v_k} \in span\{\vec{u_1}, ..., \vec{u_m}, \vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\} \tag{5.5}$$

Konačno, iz (5.3) i (5.5), možemo zaključiti (koristeći propoziciju 5.2) da operator T ima gornje trokutastu matricu obzirom na bazu $\{\vec{u_1}, ..., \vec{u_m}, \vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ vektorskog prostora V.

Propozicija 5.5. *Neka operator $T \in \mathcal{L}(V)$ ima gornje trokutastu matricu obzirom na bazu prostora V. Tada je operator T invertibilan ako i samo ako su sve vrijednosti na glavnoj dijagonali gornje trokutaste matrice različite od* 0.

Dokaz. Neka je skup $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ baza vektorskog prostora V. Tada operator T možemo prikazati na sljedeći način:

$$\mathcal{M}(T, \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Trebamo dokazati da T nije invertibilan ako i samo ako je jedna od λ_k jednaka 0. Prvo ćemo pokazati da ako je jedna od vrijednosti λ_k jednaka 0, onda je operator T neinvertibilan. Ako je $\lambda_1 = 0$, tada je $Tv_1 = 0$ (vidjeti 5.6) te iz toga slijedi da T nije invertibilan operator, kako je traženo.
Pretpostavimo da je $1 < k \leq n$ i da je $\lambda_k = 0$. Tada operator T preslikava svaki od vektora $\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}$ u $span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}\}$. (vidjeti 5.6) Kada je $\lambda_k = 0$, očito iz matričnog prikaza operatora, zaključujemo kako $T\vec{v_k} \in span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}\}$, stoga definiramo linearni operator S na sljedeći način:

$$S : span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\} \to span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}\}; \quad S\vec{v} = T\vec{v}, \quad \vec{v} \in span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}.$$

Drugim riječima, operator S je restrikcija operatora T na potprostor span $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}\}$. Primjetite da je potprostor $span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}$ dimenzije k, a potprostor $span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}\}$ je dimenzije $k-1$ (jer je skup $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ linearno nezavisan). Kako potprostor $span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}$ ima veću dimenziju nego $span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}\}$ nijedno linearno preslikavanje sa $span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}$ na $span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}\}$ ne može biti injektivno. Stoga postoji vektor $\vec{v} \neq \vec{0}, v \in span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}$ takav da je $S\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow T\vec{v} = \vec{0}$ pa tada T nije invertibilan, kako je traženo.
Sada pokažimo suprotan smjer. Pretpostavimo da T nije invertibilan, stoga znamo da T nije injektivan (vidjeti 5.4) i tada postoji vektor $\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{v} \in V$ takav da je $T\vec{v} = \vec{0}$. Kako je $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ baza prostora V, možemo zapisati vektor $\vec{v}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + \cdots + a_k\vec{v_k},$$

gdje su $a_1, ..., a_k \in K$ i $a_k \neq 0$, a k je najveći indeks za koji je dani koeficijent $a_k \neq 0$. Tada imamo jednakost:

$$\begin{aligned} 0 =& T\vec{v} = T(a_1\vec{v_1} + \cdots + a_k\vec{v_k}) \\ =& (a_1T\vec{v_1} + \cdots + a_{k-1}T\vec{v_{k-1}}) + a_kT\vec{v_k}. \end{aligned}$$

Iz ove zadnje jednakosti jasno se vidi kako je $a_kT\vec{v_k} \in span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}\}$, množenjem te jednakosti sa $\dfrac{1}{a_k}$, što je dozvoljeno jer je $a_k \neq 0$, slijedi $T\vec{v_k} \in span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}\}$. Konačno, kada $T\vec{v_k}$ prikažemo kao linearnu kombinaciju vektora baze prostora V, očito će koeficijent uz vektor $\vec{v_k}$ biti jednak 0. Drugim riječima, λ_k u matričnom prikazu će biti jednaka 0, čime je dokaz završen.

Propozicija 5.6. *Neka operator $T \in \mathcal{L}(V)$ ima gornje trokutastu matricu obzirom na bazu prostora V. Tada su vrijednosti te matrice na glavnoj dijagonali, svojstvene vrijednosti operatora T.*

Dokaz. Neka je $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ baza vektorskog prostora V u odnosu na koju operator T ima gornje trokutastu matricu :

$$\mathcal{M}(T, \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Neka je $\lambda \in K$. Tada je

$$\mathcal{M}(T - \lambda I, \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & * \\ & \lambda_2 - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}.$$

Budući da $T - \lambda I$ nije invertibilan ako i samo ako je λ jednaka jednoj od vrijednosti λ_j (vidjeti propoziciju 5.5), odnosno, λ je svojstvena vrijednost operatora T ako i samo ako je jednaka jednoj od vrijednosti λ_j.

6 Dijagonalne matrice

Ukoliko imamo zadan operator $T \in \mathcal{L}(V)$ na nekom konačnodimenzionalnom prostoru V, želimo naći takvu bazu prostora V u kojoj će matrica operatora T biti čim jednostavnija, tj. u ovom slučaju jednostavnija od gornje trokutastih matrica koje smo već upoznali. Najjednostavnije bi bilo ako bismo postigli da u nekoj bazi prostora V operatoru T pripada dijagonalna matrica jer očigledno, ukoliko je matrica dijagonalna onda su nam njezin trag, determinanta, inverz (ako postoji) ili bilo koji drugi podatak očiti bez računa.

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica koja ima nule svugdje osim eventualno na glavnoj dijagonali. Naprimjer,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

je dijagonalna matrica. Očito, svaka dijagonalna matrica je gornje trokutasta, iako u cjelini dijagonalna matrica ima više nula od gornje trokutaste matrice. Operator $T \in \mathcal{L}(V)$ ima dijagonalnu matricu

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

s obzirom na bazu $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ vektorskog prostora V ako i samo ako je

$$\begin{aligned} T\vec{v_1} &= \lambda_1 \vec{v_1} \\ &\vdots \\ T\vec{v_n} &= \lambda_n \vec{v_n}; \end{aligned}$$

gornji uvjeti slijede neposredno iz definicije matrice operatora obzirom na bazu $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$. Operator $T \in \mathcal{L}(V)$ ima dijagonalnu matricu s obzirom na neku bazu od V ako i samo ako V ima bazu koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora T.

Ukoliko operator ima prikaz u dijagonalnoj matrici tada se na dijagonali nalaze upravo svojstvene vrijednosti operatora. Nažalost, nema svaki operator dijagonalnu matricu s obzirom na neku bazu, pa čak niti na kompleksnim vektorskim prostorima. Na primjer, pogledajmo $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ definiran sa

$$T(w, z) = (z, 0).$$

Kao što vidimo, 0 je jedina svojstvena vrijednost ovog operatora i odgovarajući skup vektora je jednodimenzionalan potprostor $\{(w, 0) \in \mathbb{C}^2 : w \in \mathbb{C}\}$. Stoga, ne postoji dovoljno linearno nezavisnih vektora operatora T da se formira baza za dvodimenzionalni prostor $\mathbb{C}^2$. Zbog toga T nema dijagonalnu matricu s obzirom na bilo koju bazu u $\mathbb{C}^2$. S druge strane, uzmimo primjer operatora T na vektorskom prostoru K^3 zadan sa

$$T(z_1, z_2, z_3) = (4z_1, 4z_2, 5z_3)$$

koji ima samo dvije svojstvene vrijednosti (4 i 5), ali ovaj operator ima dijagonalnu matricu s obzirom na kanonsku bazu prostora K^3. Koliko jednostavan matrični zapis danog operatora možemo naći, nije unaprijed jasno. Iduća propozicija daje nekoliko uvjeta kako bi znali ima li operator dijagonalnu matricu obzirom na neku bazu.

Propozicija 6.1. *Neka je $T \in \mathcal{L}(V)$ i neka su $\lambda_1, ..., \lambda_m$ različite svojstvene vrijednosti operatora T. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
(a) operator T ima dijagonalnu matricu obzirom na neku bazu prostora V;
(b) V ima bazu koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora T;
(c) postoje T-invarijantni potprostori $U_1, ..., U_n$, dimenzije 1, vektorskog prostora V takvi da je $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$;
(d) $V = N(T - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus N(T - \lambda_m I)$
(e) $\dim V = \dim N(T - \lambda_1 I) + \cdots + \dim N(T - \lambda_m I)$

Dokaz. Dokazat ćemo da su tvrdnje (a) i (b) ekvivalentne i da tvrdnja (b) povlači (c).
Neka $T \in \mathcal{L}(V)$ ima $\dim V = n$ različitih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Neka je $\vec{v_j} \in V$, $\vec{v_j} \neq 0$, $\forall j$, svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_j. Obzirom da imamo $n = \dim V$ svojstvenih vektora pridruženih različitim svojstvenim vrijednostima, koji su linearno nezavisni, tada oni čine bazu vektorskog prostora V pa operator T ima dijagonalnu matricu obzirom na tu bazu. Time smo pokazali da je (a) ekvivalentno (b).
Pokažimo sada kako (b)$\Rightarrow$(c).
Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b), tj. neka je $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora T. Neka je $U_j = span(\vec{v_j})$, za svaki j. Očito, svaki U_j je jednodimenzionalni potprostor od V koji je T-invarijantan (jer svaki $\vec{v_j}$ je svojstveni vektor operatora T). Budući da je $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ baza od V, svaki vektor iz V može biti jedinstveno zapisan kao linearna kombinacija vektora baze. Drugim riječima, svaki vektor iz V može biti jedinstveno zapisan kao zbroj $\vec{u_1} + \cdots + \vec{u_n}$, gdje je svaki $\vec{u_j} \in U_j$. Tada slijedi da je $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, čime je dokaz završen.

7 Invarijantni potprostori na realnim vektorskim prostorima

Znamo da svaki operator na kompleksnom vektorskom prostoru ima svojstvene vrijednosti. Također smo vidjeli primjer koji pokazuje da analogna tvrdnja nije istinita na realnim vektorskim prostorima. Drugim riječima, operator T na realnom vektorskom prostoru V ne mora imati T-invarijantan potprostor dimenzije 1. U tom slučaju, kada je riječ o realnim vektorskim prostorima, odgovor na pitanje postoji li jednodimenzionalni invarijantan potprostor obzirom na djelovanje operatora T daje sljedeći teorem.

Teorem. 7.1. *Za svaki linearni operator $T \in \mathcal{L}(V)$ vektorskog prostora $V \neq \{0\}$ postoji T-invarijantan potprstor dimenzije 1 ili 2 .*

Dokaz. Neka je V realan vektorski prostor dimenzije $n > 0$ i $T \in \mathcal{L}(V)$. Za $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ skup $\{\vec{v}, T\vec{v}, T^2\vec{v}, ..., T^n\vec{v}\}$ je linearno zavisan jer se sastoji od $n+1$ vektora, a V je dimenzije n. Stoga postoje realni brojevi $a_0, ..., a_n$ koji nisu svi jednaki 0 takvi da vrijedi

$$0 = a_0\vec{v} + a_1T\vec{v} + \cdots + a_nT^n\vec{v},$$

gdje su $a_0, ..., a_n$ koeficijenti polinoma koji možemo zapisati u obliku

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = c(x - \lambda_1)...(x - \lambda_m)(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)...(x^2 + \alpha_M + \beta_M),$$

gdje m i M istovremeno ne mogu biti jednaki 0, c je realan broj različit od 0, λ_j, α_j, β_j su također realni koeficijenti, $m + M \geq 1$ i jednakost vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$. Tada imamo

$$\begin{aligned} 0 &= a_0\vec{v} + a_1T\vec{v} + \cdots + a_nT^n\vec{v} \\ &= (a_0I + a_1T + \cdots + a_nT^n)\vec{v} \\ &= c(T - \lambda_1I)\cdots(T - \lambda_mI)(T^2 + \alpha_1T + \beta_1)\cdots(T^2 + \alpha_MT + \beta_MI)\vec{v}, \end{aligned}$$

što znači da $T - \lambda_jI$ nije injekcija za barem jedan j ili da $T^2 + \alpha_jT + \beta_jI$ nije injekcija za barem jedan j. Ako $T - \lambda_jI$ nije injekcija onda T ima svojstvenu vrijednost pa stoga i jednodimenzionalni T-invarijantni potprostor. U drugom slučaju, ako $T^2 + \alpha_jT + \beta_jI$ nije injekcija tada postoji vektor $\vec{u} \in V$, različit od nulvektora, takav da je

$$T^2\vec{u} + \alpha_jT\vec{u} + \beta_j\vec{u} = 0.$$

Kako bi dokaz priveli kraju, trebamo pokazati da je $span\{\vec{u}, T\vec{u}\}$ koji je očito dimenzije 1 ili 2, T-invarijantan. Stoga, zapišimo elemente skupa $span\{\vec{u}, T\vec{u}\}$ u obliku $a\vec{u} + bT\vec{u}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned} T(a\vec{u} + bT\vec{u}) &= aT\vec{u} + bT^2\vec{u} \\ &= aT\vec{u} - b\alpha_jT\vec{u} - b\beta_j\vec{u}. \end{aligned}$$

Gornja jednakost nam potvrđuje da je $T(a\vec{u}+bT\vec{u}) \in span\{\vec{u}, T\vec{u}\}$. Konačno, $span\{\vec{u}, T\vec{u}\}$ je T-invarijantan potprostor.

Teorem. 7.2. *Za svaki linearni operator $T \in \mathcal{L}(V)$ na realnom vektorskom prostoru V, neparne dimenzije, postoji svojstvena vrijednost.*

Prije nego započnemo dokaz ovoga teorema koristiti će nam definicija i notacija projektora na prostoru V, preciznije:

Definicija 7.3. *Neka je $V = U \oplus W$. Tada se svaki vektor $\vec{v} \in V$ može na jedinstven način napisati u obliku $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, $\vec{u} \in U$, $\vec{v} \in V$. Stoga možemo definirati $P_{U,W} \in \mathcal{L}(V)$ relacijom*

$$P_{U,W}\vec{v} = \vec{u}$$

za koji je $P_{U,W}\vec{v} = \vec{v}$ ako i samo ako je $\vec{v} \in U$. Također ako promijenimo poredak potprostora U i W vrijedi: $P_{U,W}\vec{v} = \vec{w}$. Nadalje, $R(P_{U,W}) = U$, $N(P_{U,W}) = W$. Tako definiran linearan operator $P_{U,W}$ zove se ***projektor*** *prostora V na potprostor U duž potprostora W.*

Korolar 7.4. *Neka su V i W konačno dimenzionalni vektorski prostori. Ako je $\dim V > \dim W$ tada ne postoji operator $T : V \to W$ koji je injekcija.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti principom matematičke indukcije. Neka je V realan vektorski prostor neparne dimenzije. Očito, tvrdnja vrijedi za $\dim V = 1$. Neka je $\dim V = n$, n neparan broj, $n > 1$. Pretpostavimo da željeni rezultat vrijedi za sve operatore na svim realnim vektorskim prostorima s dimenzijom $n - 2$. Neka je $T \in \mathcal{L}(V)$ i W potprostor od V takav da je

$$V = U \oplus W.$$

Budući da W ima dimenziju jednaku $n-2$, želimo primijeniti našu pretpostavku na operator $T \mid W$. Međutim, W ne mora biti T-invarijantan, što znači da $T \mid W$ možda neće biti operator na potprostoru W, zato nam je potrebna slijedeća kompozicija operatora. Definiramo $S \in \mathcal{L}(V)$ tako da je

$$S\vec{w} = P_{W,U}(T\vec{w})$$

za $\vec{w} \in W$. Prema pretpostavci,operator S ima svojstvenu vrijednost λ. Želimo pokazati da je λ također svojstvena vrijednost operatora T. Neka je $\vec{w} \in W$, $w \neq 0$, svojstveni vektor operatora S pridružen svojstvenoj vrijednosti λ; tada je $(S - \lambda I)\vec{w} = 0$. Tražimo svojstveni vektor operatora T na prostoru $U + span\{\vec{w}\}$. Neka je vektor $\vec{u} + a\vec{w} \in U + span\{\vec{w}\}$, gdje je $\vec{u} \in U$ i $a \in \mathbb{R}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
(T - \lambda I)(\vec{u} + a\vec{w}) =& T\vec{u} - \lambda\vec{u} + a(T\vec{w} - \lambda\vec{w}) \\
=& T\vec{u} - \lambda\vec{u} + a(P_{U,W}(T\vec{w}) + P_{W,U}(T\vec{w}) - \lambda\vec{w}) \\
=& T\vec{u} - \lambda\vec{u} + a(P_{U,W}(T\vec{w}) + S\vec{w} - \lambda\vec{w}) \\
=& T\vec{u} - \lambda\vec{u} + aP_{U,W}(T\vec{w}).
\end{aligned}$$

Pri tome imamo na umu kako je $T\vec{u} \in U$ jer je U T-invarijantan potprostor, $\lambda\vec{u} \in U$ jer je $\vec{u} \in U$, a $aP_{U,W}(T\vec{w}) \in U$ (iz definicije od $P_{U,W}$). Tada $T - \lambda I$ preslikava prostor $U + span\{\vec{w}\}$ na prostor U. Budući da $U + span\{\vec{w}\}$ ima veću dimenziju od U, to znači da je $T - \lambda I \mid U + span\{\vec{w}\}$ nije injekcija (vidjeti 7.4). Drugim riječima, postoji vektor $\vec{v} \in U + span\{\vec{w}\} \subset V$ takav da je $(T - \lambda I)\vec{v} = 0$, odnosno, operator T ima svojstvenu vrijednost λ.

Literatura

[1] S. Axler, Linear algebra done right, Springler-Verlag, New york, 2004.

[2] H. Kraljević, Vektorski prostori, skripta, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera, Osijek, 2008.

[3] G. Muić i M.Primc, Vektorski prostori, skripta, Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu